Title	$\sum^{2n-1}$の接バンドルについて (変換群とコホモロジー論)
Author(s)	上部, 恒和
Citation	数理解析研究所講究録 (1975), 246: 122-124
Issue Date	1975-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/105648
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
246巻 1975年 122-124

Σ^{2n-1} の接バンドルについて。

奈女大　　上部 恒和

Σ^{2n-1} をホモトピー球面，G をその上に微分可能，固定点なしに作用する有限群とする。以下簡単のため G の位数は 2 と素とする。このとき，商多様体 Σ^{2n-1}/G 上の安定ベクトルバンドル類は G の表現環から決定される。

問題．Σ^{2n-1}/G の接バンドルを決定せよ。

ここでは，$G = Z_p$，位数が奇素数の巡回群，の場合上の問題に答える。

補題1．Σ^{2n-1}/G の安定接ベクトルバンドルは J－不変である。

この補題は次のことを意味する。Σ_i^{2n-1} 上に作用 $f_i : \Sigma \times G \to \Sigma$ が与えられたとき，equivalent 写像 h : $\Sigma_1/G, f_1 \to \Sigma_2/G, f_2$ が存在し，$h^!(J(\tau(\Sigma_2/G, f))) = J(\tau(\Sigma_1/G, f_1))$，ここに $J(\tau(\Sigma/G, f))$ は $\Sigma/G, f$ の接バンドルの安定 J－類を示す。

表現 $\kappa: G \to O(m)$ に対し, $\Sigma/G,f$ 上のベクトルバンドル $\alpha_f(\kappa)$ を $\alpha_f(\kappa) = \Sigma \times_G M_\kappa$ によって定義する。(M_κ は κ の表現空間)。

補題2. ある表現 κ が存在して, $\alpha_f(\kappa) \cong \tau(\Sigma/G,f)$ ($\cong$ は安定同型)。

$\rho_p^j: Z_p \to O(2)$ を, Z_p の生成元 a に対して

$$\rho_p(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi j/p) & -\sin(2\pi j/p) \\ \sin(2\pi j/p) & \cos(2\pi j/p) \end{pmatrix}$$

で定義される表現とする。

補題3. $\tilde{J}(\Sigma^{2n-1}/Z_p,f) \cong Z_{p^{[\frac{n-1}{p-1}]}}$ で生成元は $J(\alpha_f(\rho_p))$, 特に $J(\alpha_f(\rho_p)) = J(\alpha_f(\rho_p^j))$ $j=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}$

補題4. $\kappa: G \to O(2n)$ を固有値1をもたぬ表現, T_κ を κ による S^{2n-1} 上の線型作用, このとき $\tau(S^{2n-1}/G,f) \oplus 1 \cong \alpha_{T_\kappa}(\kappa^{-1})$, ただし κ^{-1} は $\kappa^{-1}(a) = \kappa(a^{-1})$ によって決る表現。

定理.

Σ^{2n-1} は Z_p の微分可能, 固定点なしの作用を許すとする。このとき, $n \leqq p$ ならば, 任意の表現 κ に対して $\alpha_f(\kappa) \cong_s \tau(\Sigma^{2n-1}/Z_p,f)$ となる作用 f が存在する。$n > p$ ならば, κ の次元が $2n + s \cdot p^{[\frac{n-1}{p-1}]}$ で, 自明な表現を含まぬとき, またそのときのみ $\alpha_f(\kappa) \cong_s \tau(\Sigma^{2n-1}/Z_p,f)$ を満す作用 f が存在する。

補題1〜4により，もし作用Tがあれば $\tau(\Sigma^{2n-1}/Z_p, t)$ の可能性は定理の場合につきることがわかる。存在に関することは，Wall の surgery 理論よりわかる。